Aula 3

$$T_0^2 f(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)\times x + \frac{f''(0)}{2!} x^2$$
$$= 1 + 0 \times x - \frac{1}{2} \times x^2$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x^2$$

Ex 1) $T_0^{2} (\cos x)$

$2 \to n$; $0 \to c$; $\cos x \to f(x)$

C. aux: $f(x) = \cos x \rightsquigarrow f(0) = \cos 0 = 1$

$f'(x) = -\operatorname{sen} x \rightsquigarrow f'(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0$

$f''(x) = -\cos x \rightsquigarrow f''(0) = -\cos 0 = -1$

Ex 2) $f(x) = e^{3x}$; $c = 2 \rightsquigarrow$ Queremos fórmula de Taylor de ordem n

1º Passo: Encontrar a expressão genérica de $f^{(k)}(x)$

$f(x) = e^{3x}$; $f'(x) = 3e^{3x}$; $f''(x) = 3 \cdot 3e^{3x} = 3^2 e^{3x}$; $f'''(x) = 3^3 e^{3x}$

$$\boxed{f^{(k)}(x) = 3^k e^{3x}}$$

2º Passo: Escrever o polinómio de Taylor: $T_c^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k$

C. aux. $c = 2 \rightsquigarrow f^{(k)}(2) = 3^k e^6$

$$\boxed{T_2^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k e^6}{k!} (x-2)^k}$$

3º Passo: Escrever o Resto de Lagrange: $R_c^n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}$, θ entre c e x

Nota: $f^{(n+1)}(\theta) = 3^{n+1} e^{3\theta}$

$$\boxed{R_2^n f(x) = \frac{3^{n+1} e^{3\theta}}{(n+1)!} (x-2)^{n+1}}$$, θ entre 2 e x

4º Passo: Escrever a fórmula de Taylor: $f(x) = T_c^n f(x) + R_c^n f(x)$

$$f(x) = T_2^n f(x) + R_2^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k e^6}{k!} (x-2)^k + \frac{3^{n+1} e^{3\theta}}{(n+1)!} (x-2)^{n+1}$$, θ entre 2 e x

3) $f(x) = \frac{1}{x+5}$

Nota: $(-1)^k = \begin{cases} 1, & k \text{ é par} \\ -1, & k \text{ é ímpar} \end{cases}$

$(-1)^{k+1} = \begin{cases} -1, & k \text{ é par} \\ 1, & k \text{ é ímpar} \end{cases}$

a) 1º Passo: $f(x) = \frac{1}{x+5} = (x+5)^{-1}$; $f'(x) = \boxed{-1}(x+5)^{-2}$ ($0! = 1$, $1!$)

$f''(x) = \boxed{2}(x+5)^{-3}$ ($2!$)

$f'''(x) = \boxed{-2 \times 3}(x+5)^{-4}$ ($3!$)

$f^{(4)}(x) = \boxed{2 \times 3 \times 4}(x+5)^{-5}$ ($4!$)

$\vdots$

$f^{(k)}(x) = (-1)^k \times k! \times (x+5)^{-(k+1)}$

2º Passo: Maclaurin $\downarrow$ $c=0$

$f^{(k)}(0) = (-1)^k \times k! \times 5^{-(k+1)}$

$$T_0^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \times k! \times 5^{-(k+1)}}{k!} x^k$$

3º Passo: $f^{(n+1)}(\theta) = (-1)^{n+1} \times (n+1)! \times (\theta+5)^{-(n+1+1)}$

$$R_0^n f(x) = \frac{(-1)^{n+1} \times (n+1)! \times (\theta+5)^{-(n+2)}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \theta \text{ entre } 0 \text{ e } x$$

4º Passo:

$$f(x) = T_0^n f(x) + R_0^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \times 5^{-(k+1)} x^k + (-1)^{n+1} \times (\theta+5)^{-(n+2)} x^{n+1},$$

θ entre 0 e x

b) Valor aproximado de $\frac{1}{6}$ usando $T_0^2 f(x)$

1º Passo: Calcular $T_0^2 f(x)$

Pela alínea a): $T_0^2 f(x) = \sum_{k=0}^{2} (-1)^k \underbrace{5^{-(k+1)}}_{\frac{1}{5^{k+1}}} x^k = \frac{1}{5} - \frac{1}{25}x + \frac{1}{125}x^2$ ($125 \to 5^3$)

2º Passo: Determinar o valor de x tal que $\boxed{f(x) = \frac{1}{6}}$

$\hookrightarrow \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \boxed{x=1}$

3º Passo: Substituir no polinómio de Taylor o valor de x encontrado e obtemos a aproximação pedida

$\frac{1}{6} = f(1) \simeq T_0^2 f(1)$

$\simeq \frac{1}{5} - \frac{1}{25} \times 1 + \frac{1}{125} \times 1^2 = \frac{21}{125} = 0{,}168$

Nota: $\frac{1}{6} = 0{,}16666\ldots$

c) Majorante do erro

1º Passo: Calcular o resto de Lagrange: $R_0^2 f(x)$

Pela alínea a) $R_0^2 f(x) = (-1)^3 \times (\theta+5)^{-4} \times x^3$, θ entre 0 e x

$$= \frac{-x^3}{(\theta+5)^4}, \ \theta \text{ entre } 0 \text{ e } x$$

2º Passo: Substituir x pelo valor encontrado na alínea anterior e determinar o majorante de $|R_0^2 f(x)|$

$\boxed{x=1}$ $|R_0^2 f(1)| = \left|\frac{-1^3}{(\theta+5)^4}\right|$, $\theta \in]0,1[$

$$= \frac{1}{(\theta+5)^4}, \ \theta \in]0,1[$$

$$0<\theta<1 \Leftrightarrow 5<\theta+5<6$$

$$\Rightarrow 5^4 < (\theta+5)^4 < 6^4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6^4} < \frac{1}{(\theta+5)^4} < \frac{1}{5^4}$$

Logo $|R_0^2 f(1)| < \frac{1}{5^4}$

Majorante do erro

Alternativa: Resolução desta alínea usando majorante dado na planificação de aula

4) $f(x) = \ln x$

a) Fórmula de Taylor de ordem 2 em $c=1 \longrightarrow f(x) = T_1^2 f(x) + R_1^2 f(x)$

Nota: Como pede uma ordem específica $(n=2)$ e o valor de n é pequeno, não é necessário calcular a expressão de $f^{(k)}(x)$

1º Passo:

$$f(x) = \ln x \longrightarrow f(1) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \longrightarrow f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \longrightarrow f''(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

2º Passo:

$$T_1^2 f(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = 0 + 1\times(x-1) + -\frac{1}{2}(x-1)^2$$

3º Passo: C. aux. $f'''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3}$

$$R_1^2 f(x) = \frac{f'''(\theta)}{3!}(x-1)^3 = \frac{\frac{2}{\theta^3}}{3!}(x-1)^3 = \frac{\cancel{2}}{\underbrace{3!}_{3\times 2}\theta^3}(x-1)^3 = \frac{1}{3\theta^3}(x-1)^3, \ \theta \text{ entre } 1 \text{ e } x$$

4º Passo:

$$f(x) = x-1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3\theta^3}(x-1)^3, \ \theta \text{ entre } 1 \text{ e } x$$

b) Valor aproximado de $\ln(1,2)$

$$\ln(1,2) = f(1,2) \approx T_1^2 f(1,2) = (1,2-1) - \frac{1}{2}(1,2-1)^2 = 0,2 - \frac{0,2^2}{2} = 0,18$$

c) Mostrar que o erro é inferior a 0,003

Nota: $\ln(1,2) \simeq 0,1823215...$

$$|R_1^2 f(1,2)| \underset{\substack{\text{alínea} \\ \text{a)}}}{=} \left|\frac{1}{3\theta^3}(1,2-1)^3\right|, \ \theta \ ]1;1,2[$$

$$= \frac{0,2^3}{3\theta^3}, \ \boxed{\theta \in \ ]1;1,2[} \longrightarrow 1 < \theta < 1,2$$

$$\Leftrightarrow 1 < \theta^3 < 1,2^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1,2^3} < \boxed{\frac{1}{\theta^3} < 1}$$

$$\leq \frac{0.2^3}{3} \approx 0,0027$$